Nafouz

التمرين الأول:(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$ و $C(0;-1;-4)$.

و ليكن (Δ) المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t+3 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t+1 \end{cases}$

(P) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = \alpha+\beta+3 \\ y = -\alpha+2 \quad ; \; \alpha \in \mathbb{R} \; , \; \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha+2\beta \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ على الجمل التالية مع التعليل:

1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ)
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x+y+z-8=0$
3. المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

التمرين الثاني:(4.5 نقط)

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$z_A=-2$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_B$.

1. بين أن $|z_A-z_B|^2+|z_A-z_C|^2=|z_B-z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. أثبت ان النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها
3. أ. عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1

   ب. ما طبيعة الرباعي $ABDC$
4. بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة
5. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z $(z \neq -2)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{iz-\sqrt{3}+i}{z+2}$

   أ. اثبت أن $\arg(z') = (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) + \dfrac{\pi}{2}$

   ب. عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

<u>التمرين الثالث</u> (4,5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=e^3-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=e^{-3}-1+e^{-3}u_n$

.1 احسب u_1 ، u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>-1$.

.2 أ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

.3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{2}v_n-1$

أ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

ب أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $v_n>2\times10^{-3}$

.4 أ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\cdots+\frac{u_n}{v_n}$

ب ليكن الجداء P_n حيث $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$

بين أن: $\ln(P_n)=\frac{n+1}{2}(2\ln 2+6-3n)$ ثم استنتج P_n بدلالة n

<u>التمرين الرابع</u> (07نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

.1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

.2 ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

.3 احسب من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

.4 أ بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,1<\alpha<1,2$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$

.5 أ بين أنه من كل عدد حقيقي x فان: $f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}$

ب بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل منهما

.6 ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)

.7 ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$

أ اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن : $A(\lambda)=2\ln\left(\frac{2e^\lambda}{e^\lambda+1}\right)$

ب عين قيمة العدد λ بحيث يكون $A(\lambda)=1$.

التمرين الأول :(04 نقط)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل على الجمل التالية:

السؤال	الإجابة	التعليل
1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ)	**خطأ**	لأن: $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{U}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ إذن: $\overrightarrow{CB}\times\vec{U}_{(\Delta)}=0$ لكن $B\notin(\Delta)$
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x+y+z-8=0$	**خطأ**	لأن: لدينا $(P):\begin{cases}x=\alpha+\beta+3..(1)\\y=-\alpha+2\,......(2)\\z=\alpha+2\beta\,......(3)\end{cases}$ من (2) نجد $\alpha=2-y$ و بالتعويض في (1) نجد $\beta=x+y-5$ وبالتعويض في (3) نجد $z=2-y+2x+2y-10$ ومنه $(P):2x+y-z-8=0$
3. المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)	**صحيح**	لأن: لدينا $\vec{U}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ إذن $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$ أي $\vec{n}_P\parallel\vec{U}_{(\Delta)}$ ومنه $(\Delta)\perp(P)$
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AC]$	**خطأ**	لأن: $BA\neq BC$ $BA=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}$ $BC=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{1\!\!\!9}$

التمرين الثاني:(4.5 نقط) **I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

$\begin{cases}z+2=0\\z^2+2-2\sqrt{3}i=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}z=-2\\z^2=-2+2\sqrt{3}i\end{cases}$ نضع $w=\alpha+\beta i$ جذر لـ z^2 إذن $w^2=z^2$

ومنه يكون $\begin{cases}4=\alpha^2+\beta^2\,.........(1)\\-2=\alpha^2-\beta^2\,.......(2)\\2\sqrt{3}=2\alpha\beta\quad......(3)\end{cases}$ بالجمع (1)و (2) نجد $2=2\alpha^2$ أي $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد : إذا كان $\alpha = 1$ فإن $\beta = \sqrt{3}$

وإذا كان $\alpha = -1$ فإن $\beta = -\sqrt{3}$ وبالتالي $w_1 = 1+\sqrt{3}i$ و $w_2 = -1-\sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$ هي: $S=\{-2,-1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i\}$

(II

.6 بين أن $|z_A-z_B|^2+|z_A-z_C|^2=|z_B-z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC:

$|z_A-z_B|^2+|z_A-z_C|^2=|z_B-z_C|^2$ تكافئ $BA^2+CA^2=CB^2$

ولدينا : $A(-2;0)$ و $B(-1;-\sqrt{3})$ و $C(1;\sqrt{3})$ إذن $BA^2=4$ و $CA^2=12$ و $CB^2=16$

أي $4+12=16$ إذن المثلث ABC قائم في A

.7 أثبت أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يكافئ أن $|z_A|=|z_B|=|z_C|$

$|z_A|=|-2|=2$ و $|z_B|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ و $|z_C|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

وبما أن ABC قائم في A فإن $[BC]$ قطر للدائرة المحيطة به أي مركزها هو منتصف $[BC]$: $\left(\frac{-1+1}{2};\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\right)$

إذن مركزها هو$O(0;0)$ ونصف قطرها $OC=OB=2$

.8 أ. عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1

$(z_D-z_O)=-(z_A-z_O)$ نستلزم إن $z_D=-z_A=2$

ب ما طبيعة الرباعي $ABDC$

لدينا $\begin{cases} OA=OD \\ OA=OB=OC \end{cases}$ إذن $OA=OD=OB=OC$ و$AD=BC$

ومنه الرباعي $ABDC$ هو مستطيل (القطران متناصفان ومتقايسان)

.9 بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة

اي $(z_C-z_A)=a(z_B-z_A)$ نستلزم أن $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وبعد التبسيط نجد $a=\sqrt{3}i$ ومنه التحويل النقطي الذي

مركزه A ويحول B الى C هو تشابه نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\arg(\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ومركزه $A(-2;0)$

ت $z'=\frac{iz-\sqrt{3}+i}{z+2}$: اثبت أن $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})$

أي $z'=\frac{iz-\sqrt{3}+i}{z+2}$ ومنه $z'=\frac{i(z+\sqrt{3}i+1)}{z+2}$ إذن $z'=i\frac{(z-(-1-\sqrt{3}i))}{(z-(-2))}$ $z'=i\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)$

وبالتالي $\arg(z')=\arg(i)+\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)$ أي $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})$

ث عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

z' تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $\arg(z')=\frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=0+K2\pi$ ومنه مجموعة النقط M هي:

$\{(AB)-[AB]\}$

Nafouz

<u>التمرين الثالث</u> (4,5 نقط) نعتبر المتتالية (u_n):
$$\begin{cases} u_0 = e^3 - 1 \\ u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n \end{cases}$$

.4 احسب u_1 ، u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$.

$U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_0 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(e^3 - 1) = 0$

$U_2 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(0) = e^{-3} - 1$

- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n > -1$

- من اجل $n = 0$: $U_0 > -1$ أي $e^3 - 1 > -1$ القضية صحيحة
- نفرض أن $u_n > -1$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > -1$
- لدينا : $U_n > -1$ بضرب الطرفين في (e^{-3}) نجد : $e^{-3}\,U_n > -e^{-3}$

وبإضافة العدد $(e^{-3} - 1)$ إلى الطرفين نجد: $e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n > -1$ أي $U_{n+1} > -1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > -1$

.5 أ- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا : $U_{n+1} - U_n = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n - U_n = (e^{-3} - 1)(1 + U_n)$

إذن: $U_{n+1} - U_n < 0$: لان $\begin{cases} u_n > -1 \text{ أي } 1 + U_n > 0 \\ e^{-3} - 1 < 0 \end{cases}$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد (1-) إذن فهي متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{x\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ : $e^{-3} - 1 + e^{-3}l = l$ إذن : $l = -1$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = -1$

.6 نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$ إذن : $V_n = 2U_n + 2$ ومنه $V_{n+1} = 2U_{n+1} + 2 = 2(e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n) + 2$

أي $V_{n+1} = 2e^{-3} + 2e^{-3}U_n$ وبأخذ (e^{-3}) عامل مشترك نجد $V_{n+1} = e^{-3}(2U_n + 2)$ أي $V_{n+1} = e^{-3}V_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $(q = e^{-3})$ وحدها الاول: $V_0 = 2U_0 + 2 = 2e^3$

ب- أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$V_n = 2e^3 \times (e^{-3})^n$ و $U_n = \frac{1}{2}(2e^3 \times (e^{-3})^n) - 1 = e^3 \times (e^{-3})^n - 1$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^3 \times (e^{-3})^n - 1) = -1$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $v_n > 2\times10^{-3}$

$v_n > 2\times10^{-3}$ تكافئ أن $2e^3 \times (e^{-3})^n > 2 \times 10^{-3}$ أي $e^{3-3n} > 10^{-3}$ وباستعمال خصائص الدالة ln نجد:

$3 - 3n > -3ln10$ وبعد التبسيط نجد $n < (3ln10) + 1$ و $(3ln10) + 1 \approx 7.9$ أي

$n = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

5. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\dots+\frac{u_n}{v_n}$

لدينا: $S_n=\left(U_0\times\frac{1}{V_0}\right)+\left(U_1\times\frac{1}{V_1}\right)+\cdots\cdots+\left(U_n\times\frac{1}{V_n}\right)$ ولدينا $u_n=\frac{1}{2}v_n-1$

إذن : $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{V_0}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{V_1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{V_n}\right)$

أي :
$$S_n=-\left(\frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{V_n}\right)+(n+1)\frac{1}{2}$$
$$=-\left(\frac{1}{2e^3}\times(e^3)^0+\frac{1}{2e^3}\times(e^3)^1+\cdots\cdots+\frac{1}{2e^3}\times(e^3)^n\right)+(n+1)\frac{1}{2}$$

وبالتالي : $S_n=-\left[\frac{1}{2e^3}\times\frac{(e^3)^{n+1}-1}{e^3-1}\right]+(n+1)\frac{1}{2}=\frac{1-(e^3)^{n+1}}{2e^3(e^3-1)}+\frac{n+1}{2}$

ب. ليكن الجداء P_n حيث $P_n=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$

بين أن: $\ln(P_n)=\frac{n+1}{2}(2\ln 2+6-3n)$ ثم استنتج P_n بدلالة n

لدينا : $P_n=V_0\times V_1\times\cdots\cdots\times V_n$ إذن $\ln(P_n)=\ln(V_0\times V_1\times\cdots\cdots\times V_n)$

وحسب خصائص الدالة $\ln$ يصبح $\ln(P_n)=\ln(V_0)+\ln(V_1)+\cdots\cdots+\ln(V_n)$

إي: $\ln(P_n)=\ln(2e^3\times(e^{-3})^0)+\ln(2e^3\times(e^{-3})^1)+\cdots\cdots+\ln(2e^3\times(e^{-3})^n)$
$$=(\ln2+\ln e^3+\ln(e^{-3})^0)+(\ln2+\ln e^3+\ln(e^{-3})^1)+\cdots\cdots+(\ln2+\ln e^3+\ln(e^{-3})^n)$$
$$=(\ln2+3)(n+1)+\ln(e^{-3})^{0+1+2+\cdots\cdots+n}$$

ومنه $\ln(P_n)=(\ln2+3)(n+1)+\ln(e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}=(\ln2+3)(n+1)-3n\left(\frac{n+1}{2}\right)$

وبأخذ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد $\ln(P_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln2+6-3n)$ وهو المطلوب

وباستعمال خصائص الدالة e نجد : $e^{\ln(P_n)}=e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln2+6-3n)}$ أي

$$P_n=e^{(n+1)(\ln 2)}\times e^{3(n+1)}\times e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(-3n)}=2^{n+1}\times(e^3)^{(n+1)}\times(e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

وبالتبسيط نجد : $P_n=(2e^3)^{n+1}\times(e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

<u>التمرين الرابع</u> (07نقط): $f(x)=x-\ln 4+\frac{2}{e^x+1}$

8. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

9. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها: نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$$f'(x)=1+\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

لدينا من اجل كل $x\in\mathcal{R}$ فإن $f'(x)>0$, ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathcal{R}$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Nafouz

.10 احسب من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا:

$$f(x)+f(-x) = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1} + (-x) + ln4 + \frac{2}{e^{-x}+1} = 2ln4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2e^x}{e^x+1}$$

وبتوحيد المقامات نجد: $f(x)+f(-x) = 2ln4 + \frac{2e^x+1}{e^x+1} = 2ln4 + 2$

ومنه نستنتج أن النقطة $(0\,; ln4+1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

.11 أ بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

- الدالة f دالة معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $\mathcal{R}$ إذن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.1\ ,\ 1.2]$
- ولدينا $\begin{cases} f(1.1) = 2.985 \\ f(1.2) = 3.049 \end{cases}$ اي $f(1.1) < 3 < f(1.2)$
- إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1.1\ ,\ 1.2[$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$

لدينا: $f(x)+f(-x) = 2ln4+2$ أي $f(\alpha)+f(-\alpha) = 2ln4+2$ ولدينا $f(\alpha) = 3$

إذن: $f(\alpha)+f(-\alpha) = 2ln4+2$ تكافئ: $3+f(-\alpha) = 2ln4+2$ ومنه $f(-\alpha) = -1+2ln4$

.12 أ بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x فان: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

$$f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + ln4 + \frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1} = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1} = f(x)$$

ب بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \ln 4$ و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل منهما:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+ln4)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2+ln4)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^x}{e^x+1}\right) = 0 \end{cases}$$

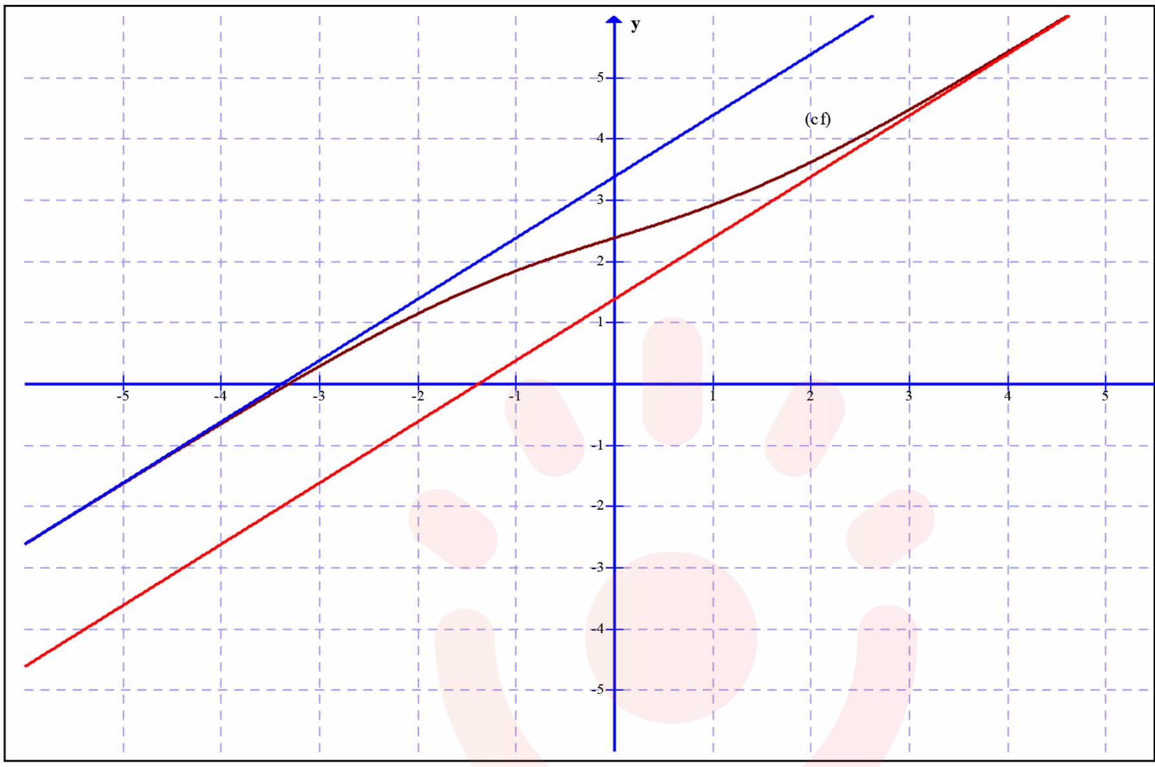
ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \ln 4$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

- لدينا $\begin{cases} f(x)-(x+ln4) = \frac{2}{e^x+1} > 0 \\ f(x)-(x+2+ln4) = \frac{-2e^x}{e^x+1} < 0 \end{cases}$

ومنه (C_f) فوق (Δ) وتحت (Δ')

13. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f):



14. اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن : $A(\lambda) = 2\ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right)$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[f(x) - y]dx = \int_0^{\lambda}\left[x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1} - (x + ln4)\right]dx$$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} 2dx - \int_0^{\lambda} \frac{2e^x}{e^x+1}dx = [2x]_0^{\lambda} - 2[ln(e^x + 1)]_0^{\lambda} = 2\lambda - 2ln\left(e^{\lambda} + 1\right) + 2ln2$$

أي $A(\lambda) = 2\lambda + 2ln2 - 2ln\left(e^{\lambda} + \mathbf{1}\right)$ وبما أن $\lambda = lne^{\lambda}$ تصبح:

$A(\lambda) = 2\left[lne^{\lambda} + ln2 - ln\left(e^{\lambda} + 1\right)\right]$ وباستعمال خصائص الدالة ln نجد

$$A(\lambda) = 2\left[ln2e^{\lambda} - ln\left(e^{\lambda} + 1\right)\right] = 2ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right)$$

ب عين قيمة العدد λ بحيث يكون $A(\lambda) = 1$.

$A(\lambda) = 1$ تكافئ $2ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right) = 1$ أي $ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right) = \frac{1}{2}$ وباستعمال خصائص الدالة e نجد :

$\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1} = e^{\frac{1}{2}}$ وبعد التبسيط نجد $e^{\lambda} = \frac{-e^{\frac{1}{2}}}{\ }$ اذن $\lambda \approx 1.54$